定理Bn : アーベル多様体の分岐被覆 (代数多様体の分類 : 80年代へ)

角田, 秀一郎

数理解析研究所講究録
392巻 1980年 24-31

定理Bn（アーベル多様体の分岐被覆）

東大 理 角田秀一郎

定理Bn. Xを代数多様体, $f:X\to A$をアーベル多様体Aへの支配的有限正則写像とする。$\kappa(X)=0$であれば, fはエタールになる。

証明. まず次の4つの定理を仮定する。

定理1[1]. Vをアーベル多様体Aの部分多様体とする。そのとき, Aのアーベル部分多様体A_1と, 代数多様体Wが存在して, 次をみたす。

(1) VはA_1をファイバーとするW上のファイバーバンドル.

(2) $\kappa(W)=\dim W=\kappa(V)$.

A_1は$\{x\in A;\ x+V\subseteq V\}^0$で特徴づけられる。ここで^{0}は$A$の原点をふくむ連結成分をあらわす。

定理2[2]. 定理Bnの仮定のもとで, $D_1,\dots,D_m$をfの分岐跡$\Delta(X/A)$の既約成分, $D_1^*\cdots D_m^*$をその非特異化とすれば,

$$\sum_{i=1}^{m} p_g(D_i^*) \le \dim A.$$

定理3[3]. $f: V \longrightarrow W$ を代数的ファイバー空間, f の一般ファイバーはアーベル多様体とすれば, $\kappa(V) \geq \kappa(W)$。

定理1,2,3の証明はそれぞれの文献参照。

定理4。A を n 次元アーベル多様体, D を A の素因子, D^* を D の非特異化とする。$\kappa(D^*) = n-1$ であれば,

$$q_k(D^*) \equiv \dim H^0(D^*, \Omega^k_{D^*}) \geqq \binom{n}{k}.$$

さらに $p_g(D^*) = n$ であれば, $q_k(D^*) = \binom{n}{k}$ とくに $|\chi(\mathcal{O}_{D^*})| = 1$。

「定理1〜4 $\Longrightarrow$ B_n」

証明 $\Delta(X/A) \neq \phi$ とする。$B = \{x \in A;\ x + \Delta(X/A) \subseteq \Delta(X/A)\}^0$ とおく。$\pi: A \to A/B$ を射影とする。$X \xrightarrow{\pi'} Y \xrightarrow{g} A/B$ を $\pi \circ f$ のスタイン分解とすれば, B の定義から, $a \in A/B$ に対して, $f^{-1}\pi^{-1}(a)$ は非特異。したがって, π' はスムーズ。よって, $\Delta(X/A) = \pi^*(Y/A/B)$ 一方 π' のファイバーは, B のエタール被覆 したがってアーベル多様体。定理3により, $0 = \kappa(X) \geq \kappa(Y)$. $\dim Y = \dim A/B$ より, $\kappa(Y) \geq \kappa(A/B) = 0$。だから $\kappa(Y) = 0$。よって $B = 0$ としてよい。$B_i = \{x \in A;\ x + D_i \subseteq D_i\}^0$ とおけば, $\bigcap_i B_i = 0$。D_i の $A \to A/B_i$ による像を E_i とおけば, 定理4により. $p_g(D_i) \geqq p_g(E_i) \geqq \dim A/B_i$ 定理2より, $\dim A \geqq \sum_i p_g(D_i)$。したがって, $p_g(E_i) = \dim A/B_i$ をえる. 再び定理4により, $|\chi(\mathcal{O}_{E_i})| = 1$。

$r: A \longrightarrow A$ $(r \in \mathbb{Z})$ を r 倍写像, X_r を r による X の引きもどしとする。r はエタールだから, $\Delta(X_r/A) = \Delta(X/A)$ の引きもどし, しかも $X_r \to A$ は定理 B_n の仮定をみたす。

$r^{-1}(D_i) = \sum_{j=1}^{p(i)} D_{ij}$ を既約分解とすれば, $\dim A \geqq \sum p_g(D_{ij}) \geqq \sum_i p(i)\, p_g(D_i)$。したがって, $r^{-1}(D_i)$ は既約でなければならない。$B_i' = \{x \in A;\ x + r^{-1}(D_i) \subseteq r^{-1}(D_i)\}^0$, E_i' を $A \to A/B_i'$ の像とすれば, $\chi(\mathcal{O}_{E_i'}) = \deg r\, \chi(\mathcal{O}_{E_i})$ で, $|\chi(\mathcal{O}_{E_i'})| = 1$ に矛盾。したがって, $\Delta(X/A) = \phi$.

Q.E.D.

「定理4の証明」

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ を A の座標とする。$\alpha: D^* \longrightarrow A$ を $D \subset A$ から誘導される写像とする。$\omega_i = \alpha^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge \check{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n)$ $(i=1,\ldots,n)$ とおく。ω_i は一次独立を示す。$\sum_i a_i \omega_i = 0$ $a_i \in \mathbb{C}$ と仮定する。P を D の一般点とすれば, 陰関数定理により, D は P のまわりで, $x_n = F(x_1, \ldots, x_{n-1})$ $(\deg F \geqq 2)$ で定義されているとしてよい。ここで F は正則関数。P のまわりで $\omega_i = (-1)^{n-i-1} \frac{\partial F}{\partial x_i} \omega_n$ $(i=1,\ldots,n-1)$ とかける。したがって, $\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i-1} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + a_n = 0$。$1 \leqq i \leqq n$ に対して, $b_i = (-1)^{n-i-1} a_i$ とおくと, $(y_1, \ldots, y_n) \in D$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, $(y_1 + b_1\alpha, \ldots, y_n + b_n\alpha) \in D$。だから,

$B = \{(b_1\alpha, \ldots, b_n\alpha) \in A;\ \alpha \in \mathbb{C}\}$ とおけば, $B + D$

$\subseteq D$。仮定により，$B=0 \Rightarrow b_i=0 \Rightarrow a_i=0$。よって ω_iは1次独立。$I=\{i_1,\dots,i_k\}$ $1\leq i_1<\dots<i_k\leq n$ に対して，$\omega_I=\alpha^*(dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k})$とおけば，$\omega_i$の一次独立により，$(\omega_I)_I$の1次独立は容易にわかる。したがって，$g_k(D^*)\geqq\binom{n}{k}$。これで定理3の前半がわかった。

後半を示す前に次の定理を証明する。

上の記号をそのまま用いる。

定理5．$f: D\to P^{n-1}$ を $\omega_1\dots\omega_n$で定まる有理写像とすれば，fは支配的。

証明。支配的でないとする。Yをfの像，gをYの一般点，Pを$f^{-1}(g)$の一般点とする。仮定から，$\dim f^{-1}(g)\geqq 1$。陰関数定理により，DはPのまわりで，$x_n=F(x_1,\dots,x_{n-1})$ $\deg F\geqq 2$とかける。fはPのまわりで $\frac{\partial F}{\partial x_1}:\dots:\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}:1$で定義されるから，$f^{-1}(g)$は$P$のまわりで，$\frac{\partial F}{\partial x_i}=0$ $(i=1,\dots,n-1)$で定義される。ΓをYをふくむP^{n-1}の因子でgのまわりで非特異になるものとする。$x_1,\dots,x_{n-1}$の線型変換をやるせば，$\frac{\partial F}{\partial x_1}=G(\frac{\partial F}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}})$が$\Gamma$を定義するとしてよい。ここで$\deg G\geqq 2$。$f^{-1}(g)$上 $\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial F}{\partial x_i})=\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial F}{\partial x_1})=\frac{\partial G}{\partial x_i}=0$。したがって，$f^{-1}(g)$は x_1方向に対して，不変。Bを$x_2=\dots=x_n=0$で定義されるAの部分アーベル多様体とすれば，$P+B\subseteq D$。Aの部分アーベル多様体は可算個だ

から、BはPによらないとしてよい。よって $B+D\leq D$ で、$B\neq 0$ だから矛盾。 Q.E.D.

定理4のつづき。

$P_g(D^*)=n$ を仮定する。PをXの一般点とし、$x_1,\dots,x_n$を定理4の証明中と同様とする。

ωをD^*上のk-型式とし、Pのまわりで、$\omega=\sum_{I\not\ni n} g_I(x_1\dots x_{n-1})\,\omega_I$ とかく、$I^c=\{1,\dots,n-1\}\setminus I$ とおくと、$\omega\wedge\omega_{I^c}=\varepsilon(I,I^c)\,g_I\,\omega_n$. ここで$\varepsilon$は$(I\,I^c)$の符号.

$\omega\wedge\omega_{I^c}\in H^0(D^*,\Omega^{n-1}_{D^*})$により、$\omega\wedge\omega_{I^c}=\sum a'_{Ii}\omega_i$ $a'_{Ii}\in\mathbb{C}$。よって、$g_I=g_I(0)+\sum_{i=1}^{n-1} a_{Ii}\frac{\partial F}{\partial x_i}$ なる $a_{Ii}\in\mathbb{C}$ がある。Jを$\{1,\dots,n-1\}$の部分集合で、個数を$n-k-2$とする。

$$\omega\wedge\omega_J\wedge dx_n=\sum_{\{i\}\cup I=J^c}\varepsilon(I,J,i)\,g_I\,\frac{\partial F}{\partial x_i}\,\omega_n.$$

前と同様、$\omega\wedge\omega_J\wedge dx_n=\sum b_{Ji}\omega_i$ $b_{Ji}\in\mathbb{C}$ となる。よって、

$$\sum_{\{i\}\cup I=J^c}\varepsilon(I,J,i)\left(g_I(0)+\sum_{j=1}^{n-1}a_{Ij}\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)\frac{\partial F}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n-1} b_{Ji}\frac{\partial F}{\partial x_i},\quad \exists\, b_{Ji}\in\mathbb{C}.$$

$\frac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}$ は定理5により、代数的独立。

Jを固定して、左辺の $\frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial x_i}$ の係数 $(j=1\dots n-1,\ i\in J^c)$ をみると、次を得る。(1) $j\in J$, $a_{Ij}=0$.

(2) $a_{Ii}=0$, $I\cup\{i\}=J^c$.

(3) $j\in J^c$ のとき、$K=J^c\setminus\{i\}\setminus\{j\}$ とおけば、

$\varepsilon(K\cup\{j\}, J, i)\, a_{K\cup\{j\}, i} + \varepsilon(K\cup\{i\}, J, j)\, a_{K\cup\{i\}, j} = 0.$

(3)より $\varepsilon(K, i)\, a_{K\cup\{i\}, i} = \varepsilon(K, j)\, a_{K\cup\{j\}, j}$.

そこで、$C_K = \varepsilon(K, i)\, a_{K\cup\{i\}, i}$ とおくと、

$$\sum_{I\not\ni n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{I i} \frac{F}{x_i}\right)\omega_I = \sum_{I\not\ni n}\left(\sum_{i\in I} a_{Ii} \frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\omega_I$$

$$= \sum_{K\not\ni n}\left(\sum_i a_{K\cup\{i\}, i} \frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\omega_K \wedge dx_i\, \varepsilon(K, i)$$

$$= \sum_{K\not\ni n}\sum_{i=1}^{n-1} C_K\, \omega_K \wedge \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{K\not\ni n} C_K\, \omega_K\right)\wedge \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = \sum_{K\not\ni n} C_K\, \omega_K \wedge dx_n.$$

よって、$\omega = \sum g_I(0)\, \omega_I + \sum a_K\, \omega_K \wedge dx_n$.

よって、$g_e(D^*) = \binom{n}{e}$ がわかった。

文献

[1] K. Ueno: Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, Lecture Notes in Math. 439, 1975, Springer P. 120 ~ P. 123.

[2] E. Viehweg: Klassifikationstheorie algebraischen Varietäten der Dimension drei, Preprint.

[3] K. Ueno: On algebraic fiber spaces of abelian varieties, Math. Ann. 237 (1978) 1-22.

附録

定理2の証明は容易であるから次にのべる。

定理２の証明．Xに双有理変換をくり返して，次の仮定をつけ加える．R_fの既約成分を$R_1, \cdots, R_{n^*}$．i) $R_1, \cdots, R_{n^*}$はすべて非特異，かつ，$p_g(R_1), \cdots p_g(R_s) > 0$，$p_g(R_{s+1}) = \cdots = p_g(R_{n^*}) = 0$とするとき，$R_i \cap R_j = \phi$（但し$i \neq j \leq s$）．

完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-\sum_{i=1}^{s} R_i) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \oplus \mathcal{O}_{R_i} \to 0$$

に$\mathcal{O}(K(X))$をテンソルして，さらに$\otimes \mathcal{O}(\Sigma R_i)$を行う

$$0 \to \mathcal{O}(K) \to \mathcal{O}(K + \sum_{i=1}^{s} R_i) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{O}(K(R_i)) \to 0$$

をえる．$\dim \Gamma(\mathcal{O}(K + \sum_{i=1}^{s} R_i)) \leq P_2(X)$（なぜなら$K(X) = R$）

だから$P_2(X) = 1$とすると，

$$0 \to \Gamma(\mathcal{O}(K)) \simeq \Gamma(\mathcal{O}(K + \Sigma R_i)) \to \bigoplus_{i=1}^{s} \Gamma(\mathcal{O}(K(R_i)))$$

$$\longrightarrow H^1(\mathcal{O}(K))$$

により，$\sum_{i=1}^{n^*} p_g(R_i) \leq \dim H^1(\mathcal{O}(K))$．$n = \dim X = \dim A$とする．

一方，$\dim H^1(\mathcal{O}(K)) = \dim H^{n-1}(\mathcal{O}) = q_{n-1}(X)$．$A$の大局座標を$x_1, \cdots, x_n$とし，$\omega_i = f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n)$

とおくとき，任意の$\omega \in \Gamma(X, \Omega_X^{n-1})$に対して，

$\omega \wedge f^* dx_i = \alpha_i \tilde{\omega}$（ここに$\tilde{\omega} = f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$は$\Gamma(X, \Omega_X^n)$の生成元）により$\alpha_i \in \mathbb{C}$をえるから

$$\left(\omega - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \omega_i\right) \wedge f^* dx_i = 0$$

がすべてのiにつき成立する。さて$\hat{\omega} = \omega - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \omega_i$
とおく。$\hat{\omega} \neq 0$ なら X の一般の点でも 0 でなく、そこでは、$(x_1 - a_1, \dots, x_m - a_n)$ が局所座標であり、$\hat{\omega} = \varphi_1 dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{m-1} + \cdots$
とかける。しかし $\hat{\omega} \wedge f^* dx_1 = \varphi_1 = 0$ 等から $\hat{\omega} = 0$ を得てしまう。即ち、

$\Gamma(X, \Omega_X^{m-1}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}\omega_i$ になり $p_g g_{m-1}(X) = n$ を之る。よって $\sum_{i=1}^{n} p_g(R_i) \leq n$.

一方、$f(R_f) = \Delta(X/A)$ であり、各 D_i につき、ある R_i $(i \leq s)$ があって、$R_i \to D_i$ は全射。よって、$p_g(R_i) \geq p_g(D_i)$。即ち、$\sum_{i=1} p_g(D_i) \leq n$ が示された。